דגימה מוכללת ו־Xampling־ חלק 1

שחר שטיין־יהושע, שחר ציפר

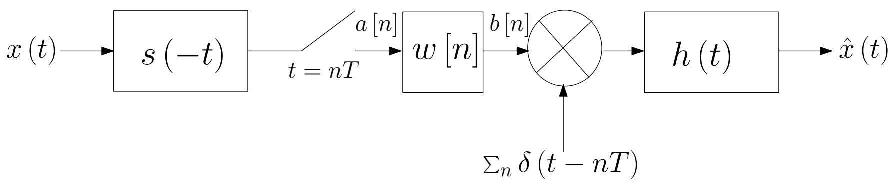
13 בדצמבר 2016

תוכן עניינים

1 הקדמה ומוטיבציה לניסוי

בקורס אותות ומערכות למדנו כי עבור אות צר סרט, יש לדגום את האות בקצב נייקוויסט על מנת לאפשר שחזור מושלם. כלל זה נגזר ממשפט הדגימה של שאנון. משפט זה מניח ידע מוקדם כלשהו על מבנה האות (prior), במקרה זה, רוחב הסרט של האות, ומתאים לו קצב דגימה מינימלי אפשרי. עם זאת, לעיתים תדר נייקוויסט של האות במערכת גדול מאוד, למרות שהמידע האפקטיבי בו מצומצם, למשל אות בעל רוחב סרט צר $\mathcal{B}$, המאופנן לתדר $500\mathcal{B}$. במקרה כזה תדר נייקוויסט הינו $1000\mathcal{B}$, על אף שחלק קטן מאוד מהספקטרום באמת מכיל מידע, לכן נחשוד כי ניתן להוריד את קצב הדגימה משמעותית מבלי לאבד מידע. במקרה פשוט זה למשל, ראינו בקורס מבוא לעיבוד אותות ספרתי (044198) כי ניתן לדגום בקצב $\mathcal{B}$ (דגימה בפס מעבר) ולהשיג שחזור מושלם של האות. דוגמה זו הינה דוגמה פשוטה בה אין צורך בעיבוד מקדים מיוחד על מנת לאפשר לדגום בקצב נמוך. בפועל ישנם מקרים רבים נוספים בהם ניתן לדגום בקצב נמוך, אם מניחים הנחות מתאימות על מבנה האות.

מטרת חלק זה של הניסוי הינו להדגים כי עבור priors שונים ניתן לנסח משפטי דגימה שונים הקובעים את קצב הדגימה המינימלי, ולהראות כי במקרים רבים ניתן לרדת מתחת לקצב נייקוויסט. ה־prior בו נעסוק בניסוי הינו אותות היושבים בתוך תת מרחב הילברט מסוג Shift-Invariant (עליו יוסבר בהרחבה בהמשך). במהלך הניסוי נדון בסכימת הדגימה והשחזור הבאה, הנלמדת בקורס "שיטות דגימה מוכללות":



איור 1: סכימת דגימה ושחזור כללית

כאשר:

- המסנן האנלוגי $s(t)$ הינו מסנן הדגימה ־ כלומר מסנן דרכו מעבירים את האות טרם הדגימה הנקודתית (עיבוד מקדים)
- המסנן הדיגיטלי $w[n]$ הינו מסנן התיקון ־ כלומר מסנן בו מעבירים את הדגימות בטרם מבצעים להן אינטרפולציה שתייצר אות רציף (עיבוד דיגיטלי)
- המסנן האנלוגי $h(t)$ הינו מסנן השחזור ־ כלומר המסנן איתו מבצעים אינטרפולציה לדגימות על מנת ליצור אות רציף במוצא המערכת

הדרישה המתבקשת ממערכת דגימה ושחזור טובה הינה "שחזור מושלם", כלומר שהאות במוצא $\hat{x}(t)$ יהיה זהה לאות בכניסה $x(t)$. מתי שיוויון מתאפשר? התשובה תלויה בתכונות של האות בכניסה, ושל המסננים השונים שנבחרו למערכת. מטרת הניסוי הנ"ל הינה להדגים כיצד יש לבחור את המסננים השונים כתלות בתכונות של האות בכניסה (הprior על האות) על מנת להשיג שחזור מושלם וקצב דגימה מינימלי.

בקורס "שיטות דגימה מוכללות" עוסקים בשלושה מקרים של סכימת הדגימה הנ"ל:

1. $s(t) = \tilde{h}(t)$, כאשר האות $x(t)$ **שייך** לתת מרחב הילברט $\mathcal{S}$ מסוג **Shift-Invariant** הנפרש על ידי מסנן השחזור $h(t)$, ו$\tilde{h}(t)$ הינו הגרעין ה**ביאורתוגונלי** של $h(t)$ (ההגדרות הרלוונטיות יוסברו בפירוט בהמשך)

2. $s(t) \neq \tilde{h}(t)$ והאות $x(t)$ **שייך** לתת מרחב הילברט $\mathcal{S}$ מסוג Shift-Invariant הנפרש על ידי מסנן השחזור $h(t)$

3. $s(t) \neq \tilde{h}(t)$ והאות $x(t)$ **אינו שייך** לתת מרחב הילברט $\mathcal{S}$ מסוג Shift-Invariant הנפרש על ידי מסנן השחזור $h(t)$ (שחזור מאולץ)

בניסוי זה נעסוק בשני המקרים הראשונים בלבד. בפרק הבא יובאו מספר תזכורות מתמטיות מקורסי עבר, בנוסף למספר הגדרות חדשות נחוצות לצורך הניסוי.

References

[1] Yonina C. Eldar. *Sampling Theory: Beyond Bandlimited Systems.* Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2014.

[2] Yonina C. Eldar and Gitta Kutyniok. *Compressed Sensing, Theory and Applications.* Cambridge University Press, 2012.

2 רקע מתמטי

לצורך הדיון במרחב הנ"ל ראשית נזכיר מספר מושגים מהקורס "אלגברה 1מ". בנוסף נכיר מספר מושגים חדשים.

- **תזכורת - מרחב וקטורי:** מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ היא קבוצה V שעליה מוגדרות פעולות חיבור וכפל בסקלר כך שלכל $u, v \in V$ ולכל $1, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים:
  - איבר אדיש: $1 \cdot v = v$, $0 + u = u$
  - סגירות לחיבור: $u + v \in V$
  - סגירות לכפל בסקלר: $\alpha \cdot u \in V$
  - קומוטטיביות: $u + v = v + u$
  - אסוציאטיביות: $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
  - דיסטריביטיביות של סקלרים: $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
  - דיסטריביטיביות של וקטורים: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
  - איבר נגדי: $u + (-u) = 0, -u \in V$
- **תזכורת - מרחב מכפלה פנימית:** יהי Vמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$, פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ תקרא מכפלה פנימית על המרחב אם היא מקיימת את התכונות הבאות:
  - אדיטיביות ברכיב הראשון: $\forall a, b, c \in V : \langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$
  - הומוגניות ברכיב הראשון: $\forall a, b \in V, \lambda \in \mathbb{F} : \langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$
  - הרמיטיות: $\forall x, y \in V,\ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
  - חיוביות לחלוטין: $\forall x \in V\ \langle x, x \rangle \geq 0$ ושוויון קיים אם ורק אם $x = 0$

  * **הערה:** עבור המרחב $L^2(\mathbb{R})$ (מרחב כל הפונקציות שהן אינטגרביליות־לבג בריבוע) המכפלה הפנימית הסטנדרטית הינה $\langle f, g \rangle = \int_{\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$.

- **הגדרה - מרחב מטרי שלם:** מרחב מטרי שלם הינו מרחב בו לכל סדרת קושי של נקודות מתוכו קיים גבול במרחב.
- **הגדרה – מרחב הילברט**: מרחב הילברט $\mathcal{H}$ הוא מרחב מכפלה פנימית שהוא מרחב מטרי שלם.
  - **הערה:** המרחב $L^2(\mathbb{R})$ הינו מרחב הילברט ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- **הגדרה - Set Transform:** בהנתן סט של וקטורים $\{u_n\} \in \mathcal{H}$ ניתן להגדיר טרנספורמציה $T : \ell_2 \to \mathcal{H}$ כך שעבור וקטור מקדמים $d \in \ell_2$ הטרנספורמציה מוגדרת על ידי

$$Td = \sum_n d_n u_n$$

- **הערה חשובה:** בניגוד למה שאולי התרגלתם, המושג וקטור יכול לשמש על מנת לתאר אותות רציפים, ולא רק בדידים. למשל, סטים אפשריים של וקטורים במרחב הילברט $\mathcal{H}$:
  - $u_n = h(t - nT)$ עבור פונקציה $h(t) \in \mathcal{H}$ כלשהי.
- **הגדרה - Adjoint:** האדג'וינט של טרנספורמציה ליניארית רציפה $T : \mathcal{S} \to \mathcal{H}$, הוא טרנספורמציה יחידה, רציפה וליניארית $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{S}$ כך ש

$$\langle Tx, y \rangle_{\mathcal{S}} = \langle x, T^* y \rangle_{\mathcal{H}}, \forall x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{S}$$

כאשר $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ הינה המכפלה הפנימית המתאימה למרחב הילברט $\mathcal{A}$.

  - **דוגמה:** נסתכל על מרחב הוקטורים באורך N בעלי ערכים ממשיים, $\mathbb{R}^{N \times 1}$, ועל המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$\langle u, v \rangle = u^T v$$

אזי בהנתן מטריצה A בגודל $N \times N$, המטריצה הנל מגדירה טרנספורמציה $A : \mathbb{R}^{N \times 1} \to \mathbb{R}^{N \times 1}$ על ידי

$$A(u) = Au$$

נשים לב כי:

$$\langle Au, v \rangle = (Au)^T v = u^T A^T v = u^T \left(A^T v\right) = \left\langle u, A^T v \right\rangle$$

כלומר, במקרה זה האדג'וינט של הטרנספורמציה $A^* = A^T$.

- **הגדרה - בסיס:** סט וקטורים $\{u_n\} \in \mathcal{H}$ הינו בסיס לתת מרחב $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ אם ורק אם הוקטורים בלתי תלויים ליניארית ופורשים את $\mathcal{S}$. אם $\{u_n\}$ בסיס ל-$\mathcal{S}$ אז כל $x \in \mathcal{S}$ ניתן לכתוב כ

$$x = \sum_n d_n u_n = Td$$

- **הגדרה - בסיס Riesz:** בסיס $\{u_n\}$ ל-$\mathcal{S}$ המגדיר את טרנספורמציית הסט T כך שהוקטורים u_n הם העמודות של T, יקרא בסיס Riesz ל-$\mathcal{S}$ אם הוא שלם וקיימים קבועים αוβ כך שלכל $d \in \ell_2$ מתקיים:

$$\alpha \|d\|^2 \leq \|Td\|^2 \leq \beta \|d\|^2$$

תנאי שקול הינו:

$$\alpha I_{\ell_2} \preceq T^*T \preceq \beta I_{\ell_2}$$

כאשר I_{ℓ_2} הינה טרנספורמציית הזהות במרחב ℓ_2.

- **הגדרה - בסיס ביאורתוגונלי (Biorthogonal Basis):** בהנתן בסיס $\mathcal{H} \ni \{u_n\}$, הבסיס הביאורתוגונלי $\mathcal{H} \ni \{\tilde{u}_n\}$ הינו סט וקטורים כך ש

$$\langle \tilde{u}_m, u_n \rangle = \delta_{mn}$$

כאשר δ_{mn} הינה הדלתא של קרוניקר.
הגדרה **שקולה** לבסיס הביאורתוגנלי במושגים של **Set Transform** הינה: בהנתן בסיס $\mathcal{H} \ni \{u_n\}$ המתאים לטרנספורמציית סט T, הבסיס הביאורתוגונלי $\mathcal{H} \ni \{\tilde{u}_n\}$ הינו הבסיס המתאים לטרנספורמצית הסט $\tilde{T}$ כך שמתקיים:

$$\tilde{T}^*T = I_{\ell_2}$$

מכך נובע שטרנספורמציית הסט המתאימה לבסיס הביאורתוגונלי נתונה על ידי:

$$\tilde{T} = T\left(T^*T\right)^{-1}$$

- **הערה:** שימו לב שאם הבסיס T הינו בסיס Riesz אזי מובטח כי $\tilde{T}$ קיים, מאחר וT^*T הינו הפיך.

- **הבחנה - חישב מקדמי האות:** בהנתן בסיס $\{u_n\}$ לתת מרחב $\mathcal{S}$ ואות $x \in \mathcal{S}$, האות x ניתן לרישום כ$x = \sum_n a_n u_n$ כאשר המקדמים a_n נתונים על ידי:

$$a_n = \langle \tilde{u}_n, x \rangle$$

3 מרחבי Shift-Invariant (SI):

- **הגדרה – מרחב Shift-Invariant:** מרחב SI (עם פונקציה יוצרת יחידה $h(t)$) הוא מרחב של אותות שניתנים לכתיבה כקומבינציה ליניארית של הזזות של הפונקציה היוצרת:

$$\mathcal{W} = \left\{ x(t) \,|x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d[n]\, h(t - nT)\,,\ \text{for some } a \in \ell_2 \right\}$$

הגדרה זו אולי נראית כמגבילה, אך למעשה הרבה מהבעיות המוכרות היום מתאימות לצורה זו.
הערה: בניסוי זה נניח כי ההזזות השונות של הפונקציה $h(t)$ הינן בלתי תלויות ליניארית. במקרה זה ניתן להגדיר בסיס H שעמודותיו הן הפונקציות $\{h(t-nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, ואז ניתן להגדיר את מרחב ה SI למעלה בעזרת טרנספורמציית סט:

$$\mathcal{W}=\{x(t)\,|x(t)=Hd,\ \text{for some } d\in\ell_2\}$$

דוגמאות למרחבי SI:

1. אותות חסומי סרט: הבחירה ב $h(t)=\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ כפונקציה היוצרת, תוביל לתת המרחב של האותות חסומי הסרט עם רוחב פס $\frac{\pi}{T}$

2. אותות PAM: במערכות תקשורת מודרניות, המידע הדיגיטלי $\{d_n\}_{n=1}^{N}$ מאופנן לאות אנלוגי, אפנונים מקובלים הם למשל Pulse Amplitude Modulation (PAM) או Quadratic Amplitude. בשיטת הPAM למשל, בוחרים מסנן שידור (או Shaping Filter) $h_T(t)$, ומאפננים את המידע הדיגיטלי באופן הבא:

$$x(t)=\sum d_n h_T(t-nT)$$

3. אותות Spline - אותות n-spline הינן אותות מהצורה:

$$s^n(t)=\sum_m d[m]\,\beta^n(t-m)$$

כאשר $\beta^n(t)$ הינה פונקציית B-spline מסדר n. פונקציות הB-spline הינן פונקציות סימטריות ופולינומיאליות למקוטעין המוגדרות ע"י:

$$\begin{aligned}\beta^0(t) &= \begin{cases}1, & |t|<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & |t|=\frac{1}{2}\\ 0, & o.t\end{cases}\\ \beta^n(t) &= \beta^{n-1}(t)*\beta^0(t)\end{aligned}$$

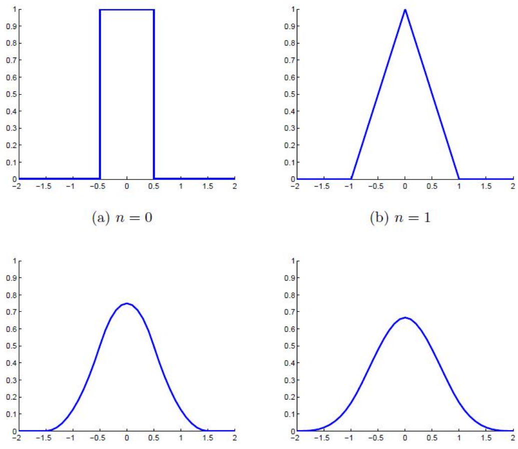
סדר הspline קובע את דרגת הB-spline. למשל עבור spline מסדר 1:

$$\begin{aligned}s^1(t) &= \sum_m d[m]\,\beta^1(t-m)\\ \beta^1(t) &= \beta^0(t)*\beta^0(t)=\begin{cases}1-|t|\,, & |t|\le 1\\ 0, & o.t\end{cases}\end{aligned}$$

ובאופן כללי לspline מסדר n:

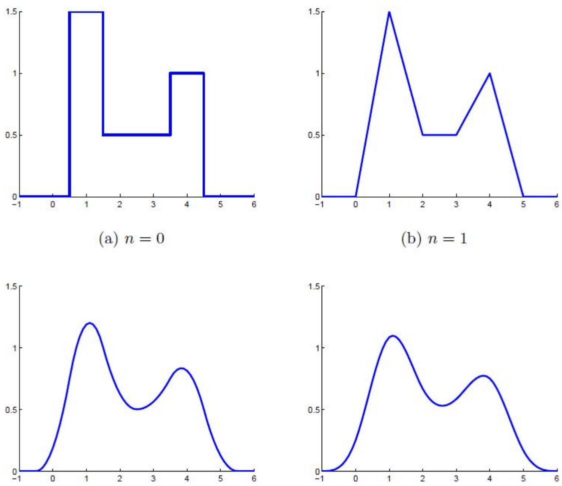
$$\begin{aligned}s^n(t) &= \sum_m d[m]\,\beta^n(t-m)\\ \beta^n(t) &= \beta^{n-1}(t)*\beta^0(t)\end{aligned}$$

שימו לב כי הפונקציה $\beta^n(t)$ מתקבלת מקונבולוציה של $\beta^0(t)$ עם עצמה n פעמים.



(a) $n = 0$ (b) $n = 1$ (c) $n = 2$ (d) $n = 3$

איור 2: דוגמה לפונקציות B-Spline מסדרים שונים



(a) $n = 0$ (b) $n = 1$ (c) $n = 2$ (d) $n = 3$

איור 3: דוגמה לפרישה של וקטור מקדמים d במרחבי spline מסדרים שונים

בניסוי הנ"ל נתנסה בדגימה מעל מרחב אותות ה־spline. בפרק הבא נדגים מהי מערכת הדגימה והשחזור הנדרשת על מנת לדגום אותו במרחבי spline שונים ללא איבוד מידע.

3.1 בסיסי Riesz למרחבי SI:

כפי שראינו בפרק הקודם, בסיס H הינו בסיס Riesz אם קיימים קבועים α, βכך שלכל וקטור מקדמים d מתקיים

$$\alpha \|d\|^2 \leq \|Hd\|^2 \leq \beta \|d\|^2$$

כעת, עבור מרחבי SI, העמודות של הבסיס H הינן הזזות של הפונקצי היוצרת $h\left(t\right)$, כלומר משפחת הפונקציות $\left\{h\left(t-kT\right)\right\}_{-\infty}^{\infty}$. לכן ניתן להראות כי תנאי שקול לתנאי Riesz עבור בסיס SI הינו:

$$\alpha\leq R_{HH}\left(e^{j\theta}\right)\leq\beta,\forall\theta\in\left[0,2\pi\right]$$

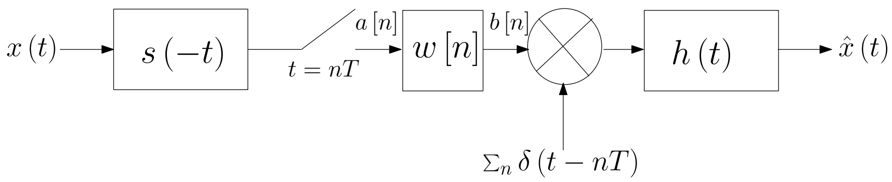
כאשר:

$$R_{HH}\left(e^{j\theta}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|H\left(\frac{\theta-2\pi k}{T}\right)\right|^{2}$$
$$H\left(f\right)=\mathcal{F}\left\{h\left(t\right)\right\}$$

(הוכחה להנ"ל ניתן למצוא ב[1] פרק 5.1).

4 דגימה מעל מרחבי SI:

תזכורת, במבוא ראינו את סכימת הדגימה והשחזור הבאה:



איור 4: סכימת דגימה ושחזור כללית

כאשר:

- המסנן האנלוגי $s(t)$ הינו מסנן הדגימה
- המסנן הדיגיטלי $w\left[n\right]$ הינו מסנן התיקון
- המסנן האנלוגי $h\left(t\right)$ הינו מסנן השחזור

בפרק זה נחזור לעסוק בסכימה זו, כאשר האותות אותם אנו מעוניינים לדגום ולשחזר הינם אותות ממרחב SI בעל פונקצייה יוצרת $h\left(t\right)$, כלומר מהצורה:

$$x\left(t\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}d\left[k\right]h\left(t-kT\right)$$

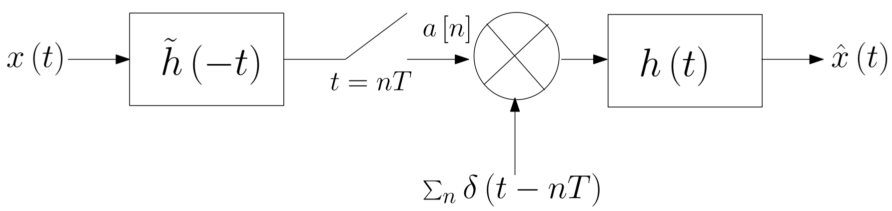
מאחר ובניסוי זה אנחנו עוסקים אך ורק בשחזור לא מאולץ, פילטר השחזור שלנו יהיה תמיד $h\left(t\right)$, הפונקציה היוצרת של מרחב הSI ממנו אנו דוגמים.
כעת נותרת השאלה, מהו פילטר הדגימה $s\left(t\right)$ שלנו? כפי שנראה בסעיפים הבאים, ניתן לחלק את סכימות הדגימה לשני מקרים: גרעין דגימה בי־אורתוגונלי, וגרעין דגימה כללי.

4.1 גרעין דגימה בי־אורתוגונלי

ראשית נעסוק במקרה בו $s(t) = \tilde{h}(t)$, כלומר, גרעין הדגימה הינו הבסיס הביאורתוגונלי ל־$h(t)$ (מתי קיים כזה גרעין?). במקרה זה, נסתכל על הדגימות $a[n]$ במוצא פילטר הדגימה:

$$\begin{aligned} a[n] &= \left(x(t) * \tilde{h}(-t)\right)|_{t=nT} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau - nT) \sum_{k\in\mathbb{Z}} d[k]\, h(\tau - kT)\, d\tau \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} d[k] \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau - nT)\, h(\tau - kT)\, d\tau = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d[k] \left\langle \tilde{h}_n, h_k \right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d[k]\, \delta_{nk} \\ &= d[n] \end{aligned}$$

כלומר, הדגימות במוצא פילטר הדגימה הינן המקדמים $d[n]$ עצמם. במקרה כזה אין צורך בפילטר תיקון דיגיטלי, מאחר והבחירה $b[n] = a[n] = d[n]$ תביא לשגיאת שחזור אפס (מדוע?).
מסקנה: כאשר גרעין הדגימה הינו הגרעין הבי־אורתוגונלי לפונקציה היוצרת, וגרעין השחזור הינו הפונקציה היוצרת עצמה, אין צורך בגרעין תיקון דיגיטלי על מנת להשיג שחזור מושלם. במקרה זה, הסכימה באיור 4 מצטמצמת לסכימה הפשוטה הבאה:



איור 5: סכימת שחזור סטנדרטית עבור פילטר דגימה בי־אורתוגונלי

4.2 גרעין דגימה כללי

כאשר גרעין הדגימה $s(t)$ הינו גרעין דגימה כללי, הדגימות $a[n]$ כבר אינן שוות בהכרח למקדמים המקוריים $d[n]$. לכן, מה עלינו לדרוש על מנת שיושג שחזור מושלם?
נרשום את האות בכניסה למערכת:

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d[k]\, h(t - kT)$$

ואת האות המשוחזר במוצא המערכת:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b[k]\, h(t - kT)$$

על מנת להשיג שחזור מושלם יש לדרוש:

$$x(t) = \hat{x}(t)$$

כלומר:

$$d[n] = b[n]$$

אם כך, יש לבחור את פילטר התיקון הדיגיטלי כך ש

$$b[n] = (a[k] * w[k])[n] = d[n]$$

שימו לב, הביטוי $a[k] * w[k]$ הינו הקונבולוציה הבדידה בין שתי הסדרות $a[k], w[k], k \in \mathbb{Z}$.

טענה: על מנת להבטיח שחזור מושלם לפי סכימת הדגימה באיור 4, יש לבחור את פילטר התיקון הדיגיטלי (בתדר) בתור:

$$\begin{aligned} W\left(e^{j\theta}\right) &= \frac{1}{R_{SH}\left(e^{j\theta}\right)} \\ r_{SH}[k] &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-kT)\,h(t)\,dt \\ R_{SH}\left(e^{j\theta}\right) &= \mathcal{F}\left\{r_{SH}[k]\right\} = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} \overline{H\left(\frac{\theta-2\pi k}{T}\right)} S\left(\frac{\theta-2\pi k}{T}\right) \end{aligned}$$

(ההוכחה המלאה נתונה ב[1] פרק 5.2).

שימו לב: כי על מנת שיהיה קיים גרעין תיקון כדרוש, יש לדרוש כי $R_{SH}\left(e^{j\theta}\right) \neq 0, \forall\theta \in (0, 2\pi)$. מה מזכיר לנו תנאי זה?

שימו לב 2: כאשר $s(t) = \tilde{h}(t)$ התנאי הנ"ל הינו שקול לתנאי Riesz. למעשה המקרה מהסעיף הקודם בו גרעין הדגימה הינו הגרעין הבי־אורתוגונלי הינו מקרה פרטי של המקרה הנ"ל, כאשר $s(t) = \tilde{h}(t)$ וניתן להראות בקלות כי במקרה זה $R_{SH}\left(e^{j\theta}\right) = R_{\tilde{H}H}\left(e^{j\theta}\right) = 1$ (מדוע?) ולכן אין צורך בגרעין תיקון דיגיטלי (או במילים אחרות, גרעין התיקום הדיגיטלי הינו $w[k] = \delta[k]$).

4.3 תנאים מספיקים לשחזור אידיאלי

כעת ניתן לנסח משפט כללי עבור סכימת הדגימה והשחזור באיור 4, המבטיח שחזור מושלם:

משפט - תנאים מספיקים לשחזור אידיאלי: יהי $\mathcal{S}$ מרחב SI עם פונקציה יוצרת $h(t)$, ויהי $x(t) \in \mathcal{S}$. בהנתן סכימת דגימה כמו באיור 4, תנאים מספיקים לשחזור מושלם של $x(t)$ הינם:

1. פילטר השחזור $h(t)$ הינו הפונקציה היוצרת של $\mathcal{S}$
2. $R_{SH}\left(e^{j\theta}\right) \neq 0, \forall\theta \in (0, 2\pi)$
3. $W\left(e^{j\theta}\right) = \frac{1}{R_{SH}\left(e^{j\theta}\right)}$

5 שאלות הכנה

1. כפי שהזכרנו בחלק הראשון של חוברת זו, בהנתן בסיס $\{u_n\}$ לתת מרחב $\mathcal{S}$, ואות $x \in \mathcal{S}$, האות x ניתן לרישום כ$x = \sum_n a_n u_n$. הראו כי המקדמים a_n נתונים על ידי:

$$a_n = \langle \tilde{u}_n, x \rangle$$

2. יהי $\mathcal{S}$ מרחב SI בעל פונקציה יוצרת $h(t)$ כך שהסט

$$h_n(t) = h(t - nT), n \in \mathbb{N}$$

הינו אורתוגונלי.

(א) חשבו הגרעין הביאורתוגונלי $\tilde{h}(t)$ של $h(t)$. הסבירו את התוצאה.

(ב) הניחו כעת כי $s(t) = \tilde{h}(t)$. מהו גרעין התיקון הדיגיטלי הדרוש במקרה זה? הסבירו.

(ג) השתמשו התוצאות הסעיפים הקודמים על מנת להסביר את משפט הדגימה של שאנון.

3. בשאלה זו נעסוק בדגימת שאנון. יהי $\mathcal{S}$ מרחב האותות חסומי הסרט בעלי רוחב סרט $\frac{\pi}{T}$. נרצה לבטא את $\mathcal{S}$ כמרחב SI:

(א) מהי הפונקציה היוצרת $h(t)$ של $\mathcal{S}$?

(ב) מהו הבסיס הפורש h_n ל$\mathcal{S}$? הראו כי זהו בסיס אורתוגנלי וחשבו את הבסיס הביאורתוגנלי $\tilde{h}_n$.

(ג) מהו פילטר התיקון הדיגיטלי $w[n]$?

(ד) חשבו את הדגימות $a[n] = \left\langle \tilde{h}_n, x \right\rangle$. **רמז:** השתמשו בעובדה ש

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, h(nT - t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, H(\omega)\, e^{j\omega nT} d\omega$$

וש$x(t)$ חסום סרט.

(ה) שרטטו את סכימת הדגימה המתקבלת. הסבירו את התוצאה.

4. כעת נעסוק בדגימה מעל מרחבי spline:

(א) חשבו את $B^m(\omega)$, התמרת פורייה של B-spline מסדר m, כלומר $\beta^m(t)$. האם זהו אות חסום סרט?מהו קצב נייקוויסט של האות כתלות בm?

(ב) יהי $\mathcal{S}$ מרחב אותות spline מסדר m, ויהי $x(t) \in \mathcal{S}$ כך ש

$$x(t) = \sum d[k]\, \beta^m(t - k)$$

חשבו את הדגימות $a[n]$ המתקבלות כאשר דוגמים את $x(t)$ בעזרת פילטר דגימה $s(t) = \beta^p(t)$, כפונקציה של המקדמים $d[k]$. הניחו כי מוצא פילטר הדגימה נדגם בשלמים ($T = 1$).

(ג) חשבו את $A\left(e^{j\theta}\right)$, התמרת DTFT של הדגימות $a[n]$ מהסעיף הקודם, כפונקציה של $D\left(e^{j\theta}\right)$, התמרת DTFT של המקדמים $d[k]$. **רמז:** הציגו את הדגימות כקונבלוציה של שתי סדרות.

(ד) כעת הניחו כי $m = 1$. מעוניינים להשתמש בפילטר שחזור $\beta^1(t)$, ובפילטר דגימה $\beta^n(t)$. בטאו את תגובת התדר של פילטר השחזור הנחוץ $W\left(e^{j\theta}\right)$ כתלות בn.

(ה) עבור אילו ערכי n שיחזור מושלם מתאפשר?

(ו) **שאלת בונוס:** איך תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם תחליפו בין פילטר השחזור ופילטר הדגימה?

6 מהלך הניסוי

בחלק זה של הניסוי נעסוק במרחב אותות spline. מטרת החלק המעשי הינו להדגים את סכימת הדגימה והשחזור בה עסקנו בדוח ההכנה, כאשר פילטר הדגימה והשחזור יהיו B-spline מסדרים שונים.

1. כתבו פונקציה $\text{SplineExpansion}\left(d,t,n\right)$, המקבלת וקטור מקדמים d באורך K, וקטור זמנים $t=0:\Delta t:T$ וסדר n, $0\le n\le 2$, ומחזירה את וקטור הערכים של אות spline מסדר n בעל מקדמים d, בזמנים t.

2. הציגו את התוצאות שמחזירה הפונקציה עבור הקלטים הבאים עם וקטור זמנים : $t=0:0.01:10$, הסבירו:

   (א) $d=[0\,0\,1\,0\,0]$,$n=0$

   (ב) $d=[4\,2\,1\,9\,1]$,$n=0$

   (ג) $d=[0\,0\,1\,0\,0]$,$n=1$

   (ד) $d=[4\,2\,1\,9\,1]$,$n=1$

3. הגרילו וקטור מקדמים באורך 5 המכיל מספרים שלמים בטווח $0-10$, וצרו ממנו את אות הspline המתאים במרחב SI מסדר 1. הציגו את האות ואת תגובת התדר שלו ביחידות לוגריתמיות (dB).

4. בסעיף זה נעסוק במערכת הדגימה והשחזור הקלאסית של שאנון, כלומר: סינון במסנן למניעת קיפולים, דגימה נקודתית, שחזור ע"י אינטרפולציה עם פונקציות sinc.

   (א) רשמו את הקשר הנדרש בין תדר המסנן למניעת קיפולים, קצב הדגימה, והתדר של פונקציית הsinc במערכת הדגימה הנ"ל. מהו התנאי על האות בכניסה על מנת שהמערכת תאפשר שחזור מושלם?

   (ב) עבור כל אחד משלושת השלבים במערכת הסבירו **בקצרה** מה ההשפעה של הפעולה המתבצעת על האות בכניסה, בזמן ובתדר.

   (ג) כעת נשתמש במערכת הנל על מנת לדגום את האות שיצרנו בסעיף הקודם. עבור כל אחד מהקצבים הבאים, הציגו את האות המשוחזר שיתקבל במוצא מערכת הדגימה והשחזור. עבור כל קצב רשמו את מספר הדגימות המתקבל והציגו את תוצאת השחזור על גבי האות המקורי.

      i. $T_1=1$

      ii. $T_2=0.5$

      iii. $T_3=0.1$

   (ד) הסבירו בקצרה מה היה משתנה בתוצאה לו היינו מסירים את המסנן למניעת קיפולים שקדם לדגימה הנקודתית.

5. חשבו את הדגימות המתקבלות כאשר דוגמים את האות מהסעיף הקודם בעזרת פילטרי הדגימה הבאים. הציגו את המקדמים המתקבלים עבור כל פילטר על גרף אחד יחד עם האות המקורי.

   (א) $s_1\left(t\right)=\beta^0\left(t\right)$

   (ב) $s_2\left(t\right)=\beta^1\left(t\right)$

6. עבור כל אחד מהפילטרים בסעיף הקודם כתבו במפורש את תגובת התדר של פילטר התיקון הנדרש כאשר משתמשים בפילטר שחזור $h\left(t\right)=\beta^1\left(t\right)$. מומלץ להעזר בפונקציית הקורלציה בין האותות לצורך חישוב פילטר התיקון בסעיף זה.

7. עבור כל אחד מפילטרי הדגימה, בצעו שחזור של האות מהמקדמים, פעם מבלי להעביר אותם בפילטר התיקון ופעם לאחר העברתם בפילטר התיקון. עבור כל פילטר דגימה הציגו שני גרפים: גרף אחד שיציג את האות המקורי, המקדמים לפני פילטר התיקון, והשחזור המתקבל מהמקדמים לפני הפילטר, וגרף שני שיכיל את האות המקורי, המקדמים אחרי פילטר התיקון, והשחזור המתקבל מהם. הסבירו את התוצאות בכל גרף.

8. הסבירו מהו קצב הדגימה האפקטיבי בו דגמתם את האות, ומה מספר הדגימות שהתקבל, והשוו לקצב נייקוויסט.